ECOLE POLYTECHNIQUE

OPTION P'

CONCOURS D'ADMISSION 1984

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

On considère un espace vectoriel complexe H de dimension finie $n \geqslant 2$ sur $\mathbb{C}$, muni d'un produit scalaire hermitien linéaire par rapport à sa première variable et noté $(x \mid y)$ pour tout couple (x, y) d'éléments de H ; la norme de x associée à ce produit scalaire est notée $\| x \|$, et S désigne l'ensemble des éléments de norme 1.

L'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des matrices carrées à n^2 éléments complexes est noté $\mathfrak{M}$. Dans tout le problème, A désigne un élément de $\mathfrak{M}$ et on rapporte H à une base orthonormée pour laquelle toute matrice $A \in \mathfrak{M}$ est considérée comme la matrice d'un endomorphisme de H qui donne de tout $x \in H$ une image notée Ax. Enfin, on désigne par :

$| A |$ la borne supérieure, a priori dans $\mathbb{R} \cup \{ +\infty \}$, des $\| Ax \|$ pour $x \in S$;

$r(A)$ le plus grand des modules des valeurs propres de A ;

φ_A l'application de H dans $\mathbb{C}$ définie par $\varphi_A(x) = (Ax \mid x)$;

$W(A)$ l'image de S donnée par φ_A dans $\mathbb{C}$.

I

1 - Vérifier que l'application $A \mapsto | A |$ est une norme sur $\mathfrak{M}$.

2 - ***a.*** Montrer que $W(A) = \{ 0 \}$ si et seulement si A est la matrice nulle.

b. En admettant qu'il existe $x_0 \in S$ tel que $| \varphi_A(x_0) | = \sup_{x \in S} | \varphi_A(x) |$, et en notant désormais $\omega(A)$ le module de $\varphi_A(x_0)$, montrer que l'application $A \mapsto \omega(A)$ est une norme sur $\mathfrak{M}$. Quelle inégalité en déduit-on pour la borne inférieure des quotients $\omega(A) / | A |$ pour l'ensemble des matrices A non nulles ? L'ensemble de ces quotients est-il majoré dans $\mathbb{R}$?

c. Si $U \in \mathfrak{M}$ est une matrice unitaire, comparer $W(U^{-1} A U)$ et $W(A)$, ainsi que $\omega(U^{-1} A U)$ et $\omega(A)$.

.../...

3 - *a.* Comparer r (A) , ω (A) et | A | .

b. Montrer que si ω (A) = | A | , x_0 est un vecteur propre de A et que r (A) = ω (A) .

c. Pour tout couple (x , y) $\in H^2$, simplifier l'expression

$$\varphi_A (x + y) - \varphi_A (x - y) + i\varphi_A (x + iy) - i\varphi_A (x - iy)$$

et en déduire l'inégalité | A | $\leqslant 2\omega$ (A) .

4 - *a.* Dans le cas n = 3 , calculer numériquement $\omega (A_1)$, r (A_1) et | A_1 | et déterminer W (A_1) pour

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

b. Quelles informations complémentaires déduit-on de cet exemple à propos des questions **I,3** ***b*** et **I,3** ***c*** ?

II

On donne A $\in \mathfrak{M}$ et deux éléments distincts ξ et η de W (A) , images respectives par φ_A des éléments x et y de S ; de plus ρ est un nombre complexe fixé, de module 1 .

1 - Montrer que l'application u de [0 , 1] dans H définie pour tout t $\in$ [0 , 1] par u (t) = t ρ x + (1 − t) y ne s'annule pas.

2 - *a.* En posant

$$A' = \frac{1}{\xi - \eta} A - \frac{\eta}{\xi - \eta} I$$

où I est la matrice unité pour la multiplication dans l'algèbre $\mathfrak{M}$, montrer qu'on peut choisir ρ de façon que l'image de [0,1] par $\varphi_{A'} \circ u$ soit incluse dans $\mathbb{R}$.

b. En utilisant la fonction f définie sur [0,1] par

$$f (t) = \| u (t) \|^{-2} \varphi_{A'} \circ u (t)$$

en déduire que W (A′) contient le segment [0,1] de $\mathbb{R}$.

3 - *a.* Quelle transformation géométrique lie W (A) et W (A′) ?

b. Prouver que W (A) contient, dans le plan complexe identifié à $\mathbb{R}^2$, le segment de droite d'extrémités ξ et η .

c. Soit G (A) la partie de $\mathbb{C}$ constituée de tous les barycentres des valeurs propres λ_j de A , affectées de coefficients positifs ou nuls quelconques. Montrer que G (A) est inclus au sens large dans W (A) .

. . . / . . .

4 - *a.* Dans le cas où n = 3 , calculer numériquement $\omega(A_2)$, $r(A_2)$ et $|A_2|$ et déterminer $W(A_2)$ pour

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

b. Quelle information complémentaire déduit-on de cet exemple à propos de *l'ensemble* des deux questions **I,3** ***b*** et **II,3** ***c*** ?

5 - *a.* Dans le cas où n = 6 , calculer numériquement $\omega(A_3)$, $r(A_3)$ et $|A_3|$ et déterminer $W(A_3)$ pour

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

b. Quelle information complémentaire déduit-on de cet exemple à propos de *l'ensemble* des deux questions **I,3** ***b*** et **II,3** ***c*** ?

III

On suppose dans cette partie que $A \in \mathfrak{M}$ est de la forme $A = B + i C$, où B et C sont deux matrices hermitiennes qui commutent l'une avec l'autre.

1 - Montrer que cette hypothèse équivaut à la commutativité de A avec ${}^t\overline{A}$, transposée de l'imaginaire conjuguée de A .

2 - *a.* Montrer qu'il existe une matrice unitaire $U \in \mathfrak{M}$ telle que $U^{-1} B U$, $U^{-1} C U$ et $U^{-1} A U$ soient toutes trois diagonales.

b. Etablir les égalités $G(A) = W(A)$ et $r(A) = \omega(A) = |A|$.

3 - *a.* La matrice A_3 de la question **II,5** vérifie-t-elle les hypothèses de la présente partie **III** ?

b. Quelle information complémentaire déduit-on de cet exemple à propos de la question **III,2** ***b*** ?

4 - Donner dans le cas n = 5 un exemple d'une matrice A_4 telle que $A_4 {}^t\overline{A}_4 \neq {}^t\overline{A}_4 A_4$, avec $G(A_4) = W(A_4)$ et $r(A_4) = \omega(A_4) = |A_4|$.

♦
♦ ♦